第七章 参数估计

- 数理统计的基本问题是根据样本所提供的信息对总体的分布以及分布中的参数等作出统计推断的问题。
- 如:已知总体$X \sim N(\mu, 1)$, μ 未知。对未知参数μ进行估计，这就是参数估计问题。
- 参数估计分为：点估计与区间估计。

§ 7.1 矩估计

- 设$(X_1,X_2,\dots,X_n)$是来自总体$X\sim F(x,\theta)$的一个样本。构造统计量 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 作为θ 的估计，以样本观察值$(x_1,x_2,\dots,x_n)$代入，得到θ 的估计值 $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$。这样的估计称为点估计。

- 矩估计的思想：用样本的原点矩去(替换)估计总体的同阶原点矩。

- 矩估计的具体步骤如下：设总体**X**的分布中含有**k**个未知参数$\theta_1,\ldots,\theta_k$，
- **1.**求总体的各阶原点矩$\mu_i = g_i(\theta_1,\ldots,\theta_k), i=1,2\ldots,k$
- **2.**解上述方程组得：

$$\begin{cases} \theta_1 = h_1(\mu_1,\cdots,\mu_k) \\ \theta_2 = h_2(\mu_1,\cdots,\mu_k) \\ \cdots \\ \theta_k = h_k(\mu_1,\cdots,\mu_k) \end{cases}$$

- **3.**用样本原点矩$A_1,\ldots,A_k$ 代替方程组中得总体矩$\mu_1,\ldots,\mu_k$得矩估计：

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = h_1(A_1,\cdots,A_k) \\ \hat{\theta}_2 = h_2(A_1,\cdots,A_k) \\ \qquad\cdots \\ \hat{\theta}_k = h_k(A_1,\cdots,A_k) \end{cases}$$

- 矩估计的理论基础: 大数定理

$X_1^k,\cdots,X_n^k$ 独立同分布 $EX_i^k=\mu_k, i=1,2,\cdots,n$ 则:

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\xrightarrow{P}EX_i^k=\mu_k\quad(n\to\infty)$$

注意u_k中一般含有参数信息。

- 如果参数θ可以表示为总体原点矩的连续函数:

$$\theta=h(\mu_1,\cdots,\mu_k)$$

则矩估计

$$\hat{\theta}=h(A_1,\cdots,A_k)\xrightarrow{P}\theta=h(\mu_1,\cdots,\mu_k)$$

- 例7.1.1. 设$X_1,\ldots,X_n$为来自总体X样本，总体X的密度函数为:

$$p(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}},\quad x\in R$$

其中θ>0为未知参数，求θ的矩估计量。

- 解: $\mu_1=E(X)=0;$

$$\mu_2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\theta}x^2e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta}x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta^2$$

从而 $\theta=\sqrt{\frac{\mu_2}{2}}$

θ的矩估计量 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{A_2}{2}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}}$

- 例7.1.2.设$X_1,\ldots,X_n$为总体X的样本，总体X～$N(\mu, \sigma^2)$。其中μ, σ^2为未知参数，求μ, σ^2的矩估计量。
- 解： $\mu = EX = \mu_1, \sigma^2 = DX = \mu_2 - \mu_1^2.$

$$\hat{\mu} = A_1 = \bar{X},$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\bar{X})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n}S^2 = S^{*2}$$

- 例7.1.3. 设$X_1,\ldots,X_n$为总体X的样本，总体X～U[a,b]。其中a<b为未知参数，求a,b的矩估计量。
- 解：$$\mu_1 = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\mu_2 = E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

联立方程解得$\begin{cases} a=\mu_1 - \sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)} = \mu_1 - \sqrt{3Var(X)} \\ b = \mu_1 + \sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)} = \mu_1 + \sqrt{3Var(X)} \end{cases}$

a,b的矩估计量为：

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3\frac{n-1}{n}S^2}, \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3\frac{n-1}{n}S^2}$$

§ 7.2 极大似然估计

- 基本原理:用<u>样本出现概率达到最大</u>的参数值作为未知参数的估计值。

极大似然估计（1912年由Fisher提出）是统计中最重要的方法。

已知一枪打中10环，问这一枪由谁打的？

↓

射手甲，命中10环概率0.9　　射手乙，命中10环概率0.2

↓

100个射手，命中10环概率为$p_1,\ldots,p_{100}$，选哪位射手？

↓

选取射手k，使得$p_k = \max\{p_1,\ldots,p_{100}\}$

- **(1)若总体X是离散型随机变量, 其分布列为 $P(X=x)= p(x;\theta)$, $\theta\in\Theta$ 为待估参数, $X_1,X_2,\ldots,X_n$是X的样本。**

- **则样本$X_1,X_2,\ldots,X_n$取到观察值$x_1,x_2,\ldots,x_n$的概率, 亦即事件$\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\}$发生的概率为:**

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

- (2)若总体X是连续型随机变量, 其密度函数为p(x;θ), θ∈Θ 为待估参数,则$X_1,X_2,\ldots,X_n$的联合密度在观察值$x_1,x_2,\ldots,x_n$处的值为

$$f_{(X_1,\cdots X_n)}(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p_{X_i}(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

- 定义：$L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$ 称为似然函数。
- 直观想法:现在已经取到样本值$x_1,x_2,\ldots,x_n$了,求参数估计的问题就转化为求解L(θ)极大值点的问题。这就是极大似然估计。

- **定义：** 对给定的样本观察值$x_1,x_2,\ldots,x_n$的概率，如果 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$ 满足下式

$$L(x_1,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta} L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$$

则称 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$ 为极大似然估计值，相应的统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 称为θ的极大似然估计量。

- 极大似然估计具有不变性：若g(θ)作为θ的连续函数，则 $g(\hat{\theta})$ 就是 g(θ)的极大似然估计。

求极大似然估计的具体步骤：

- （1） 写出似然函数L(θ);
- （2） 对似然函数L(θ)取自然对数，得到对数似然函数lnL(θ)；
- （3） 对对数似然函数lnL(θ)，关于θ求偏导，并令其为0（如果可以等于0的话），得到似然方程（组）：

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(\theta) = 0 \quad (i = 1, \cdots, k)$$

- （4）从上述似然方程（组）中解出参数θ;
- （5）检验（4）中得到的解确为似然函数或对数似然函数的最大值点（可以不做）。

- 例7.2.1.设总体X，$X_1,\ldots,X_n$为样本，总体X的密度函数为：

$$p(x;\lambda)=\lambda x^{\lambda-1}, \quad 0<x<1$$

其中$\lambda>0$为未知参数，求λ的极大似然估计量。

- 解：设$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$为样本观察值，则似然函数为

$$L(\lambda)=\lambda^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\lambda-1}$$

- 对数似然函数为

$$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda+(\lambda-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

- 令 $$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$$
- 解得 $$\lambda = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$$
- 验证如下： $$\left.\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2}\right|_{\lambda=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}} = -\left.\frac{n}{\lambda^2}\right|_{\lambda=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}} < 0$$
- 所以L(λ) 的最大值点为 $$\lambda = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$$
- λ的极大似然估计量为

$$\hat{\lambda}_L = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$$

- 例7.2.2.设总体X，$X_1,\ldots,X_n$为样本，总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$。其中μ, σ^2为未知参数，求μ, σ^2， σ的极大似然估计量。
- 解：设$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$为样本观察值，则似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad \mu\in R,\sigma^2>0$$

- 对数似然函数为

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

- 令 $$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0 \\ \dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0 \end{cases}$$
- 解得 $$\begin{cases} \mu=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x} \\ \sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \end{cases}$$
- 经检验 $\hat{\mu}=\bar{x},\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{n-1}{n}s^2$ 确为最大值点。
- 从而μ, σ^2的极大似然估计量为 $\hat{\mu}=\bar{X},\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{n-1}{n}S^2$
- σ的极大似然估计量为 $\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}S$

- 例7.2.3.设总体X，$X_1,\ldots,X_n$为样本，总体X～$U[a,b]$。其中$a<b$为未知参数，求a,b的极大似然估计量。
- 解：

$$p(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$L(a,b)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;a,b)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n} & a\le x_1,\cdots,x_n\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$x_{(1)} = \min\{x_i\}$ $x_{(n)} = \max\{x_i\}$

- 即

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n} & a \le x_{(1)} \le x_{(n)} \le b \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

- 显然上述的似然函数关于*a*,*b*的偏导数都不为0，因此求*L*(*a*,*b*)的最大值点只能根据它的单调性来决定。
- 观察得*a*,*b*的极大似然估计量。

$$\hat{a}_L = X_{(1)},\ \hat{b}_L = X_{(n)}$$

- 例7.2.4. 设总体X~b(1,p)，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是X的一个样本， 求p的矩估计量和极大似然估计量。

- 例7.2.5. 设总体X~P(λ)，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是X的一个样本，求λ的矩估计量和极大似然估计量。

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta e^{\theta}x^{-(\theta+1)} \qquad (x>e)$$

$$=\theta^{n}e^{n\theta}\prod_{i=1}^{n}x_i^{-(\theta+1)}$$

$\ln L(\theta) = n\ln\theta + n\theta - (\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} + n - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0 \Rightarrow \frac{1}{\theta} = \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - 1$

$\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - n}$

- 例7.2.6. 设总体X的密度函数为：

$$p(x) = \begin{cases} \theta \cdot e^{\theta} \cdot x^{-(\theta+1)} & x > e \\ 0 & x \le e \end{cases}$$

其中θ>1为未知参数，求：θ的矩估计与极大似然估计。

$-\frac{1}{\theta+1}$

- 解：矩估计及极大似然估计如下：

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - e}$$

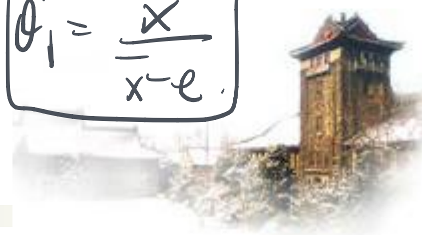
$$\hat{\theta}_2 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - n}$$

$EX = \int_e^{+\infty} \theta e^{\theta} \cdot x^{-\theta}\, dx$

$= \theta e^{\theta} \cdot \frac{1}{1-\theta}\, x^{-\theta+1}\Big|_e^{+\infty}$

$= \frac{\theta}{\theta-1} \cdot e = \bar{X}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_1 = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-e}}$$



§ 7.3 估计量的优良性准则

- 一、 无偏性
- 定义:设 $\hat{\theta}$ 是θ的一个估计量, 若$\forall\,\theta\in\Theta$, 有

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称 $\hat{\theta}$为参数θ的无偏估计量。

- 若

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称为渐近无偏估计量。

- 例7.3.1. 对任一总体而言, 样本的k阶原点矩是总体k阶原点矩的无偏估计。

$$E(A_k)=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^k}{n}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}EX_i^k}{n}=EX_i^k=\mu_k$$

- 例7.3.2. 样本方差是总体方差的无偏估计; 样本二阶中心矩是总体方差的渐近无偏估计。

$$E\left(S^2\right)=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}\right)=\sigma^2,\quad E\left(\frac{n-1}{n}S^2\right)=\frac{(n-1)\sigma^2}{n}$$

- 解：因为

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{n}{n-1}(\bar{X})^2$$

- 所以

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-\frac{n}{n-1}E(\bar{X})^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[\sigma^2+\mu^2]-\frac{n}{n-1}[\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2]=\sigma^2$$

- 例7.3.3. 设$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自$X\sim U[0,\ \theta]$的一个样本, 求c为何值时, $cX_{(n)}$为θ的无偏估计量。
- 解： $X_{(n)}$的密度函数为

$$p_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & x\in[0,\theta]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(cX_{(n)})=cE(X_{(n)})=c\int_0^\theta x\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx$$

$$=c\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n dx=c\frac{n}{\theta^n}\frac{\theta^{n+1}}{n+1}=c\frac{n\theta}{n+1}=\theta$$

$$\therefore c=\frac{n+1}{n}$$

- 例7.3.4. 设总体X~P(λ)，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是X的一个样本，试证明样本均值和样本方差都是λ的无偏估计，且$a\in[0,1]$，$a\bar{X}+(1-a)S^2$也是λ的无偏估计。
- 例7.3.5. 设总体X~b(1,*p*)，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是X的一个样本，求p 的两个无偏估计量。
- 这意味着一个参数可能存在无穷多的无偏估计，但哪个估计量更好呢？所以我们必须从其它角度提出判断的依据。

- 二、 均方误差
- 定义：设 $\hat{\theta}$ 是θ的一个估计量,称

$$E(\hat{\theta}-\theta)^2$$

为$\hat{\theta}$的均方误差。记为 $M(\hat{\theta},\theta)$ 。

$$M(\hat{\theta},\theta)=E(\hat{\theta}-\theta)^2=E\left[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})+E(\hat{\theta})-\theta\right]^2$$

$$=E\left[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right]^2+E\left[E(\hat{\theta})-\theta\right]^2+2E(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta})-\theta)$$

$$=D(\hat{\theta})+\left[E(\hat{\theta})-\theta\right]^2$$

- $\left[E(\hat{\theta})-\theta\right]^2$表示系统误差的大小程度，称为偏差部分；
- $D(\hat{\theta})$ 表示随机误差的大小程度，为估计量的方差。

- 均方误差准则：估计量的均方误差越小越好。

- 例7.3.6.设$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自$X \sim U[0, \theta]$的一个样本, 证明 $\hat{\theta}_1 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}, \hat{\theta}_2 = 2\bar{X}$ 都是θ的无偏估计量。并比较它们的均方误差。
- 解: $X_{(n)}$ 密度函数为 $p_{X_{(n)}}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 \le x \le \theta$

$$Var\left(\hat{\theta}_1\right) = Var\left(\frac{n+1}{n} X_{(n)}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 Var\left(X_{(n)}\right)$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left[\int_0^\theta x^2 \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \theta^2\right] =$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left[\frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \theta^2\right] = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

$$Var\left(\hat{\theta}_2\right) = Var\left(2\bar{X}\right) = 4Var(\bar{X}) = 4\frac{\theta^2/12}{n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

- 三、一致性
- 定义：设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个估计量，若 $\forall\,\theta\in\Theta$, 有

$$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 是θ的一致估计量。

- 直观意义：当样本量趋于无穷时，一致估计量会趋于真实值。
- 注：矩估计一般是一致估计，有些极大似然估计也有一致性。

§ 7.4 正态总体的区间估计

- 一、基本概念与枢轴变量法
- 点估计给人们一个明确的数量概念，但它本身没有反映这种估计的可靠程度。我们可以构造随机区间

$$(\hat{\theta}_1(X_1,\cdots X_n),\hat{\theta}_2(X_1,\cdots X_n))$$

来估计参数θ的范围。

$$P(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2)$$

就是以该区间作为θ的估计时的可靠程度。

- **定义**：设 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2(\hat{\theta}_1\le\hat{\theta}_2)$ 是两个统计量，α (0< α <1)为一给定常数, 若$\forall\theta\in\Theta$, 都有

$$P(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2)=1-\alpha$$

则称 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$为$\theta$的**置信系数**为1-$\alpha$的置信区间。 1-$\alpha$为置信度或置信系数。

- 置信区间的统计意义：给定一个观测值$(x_1,\ldots,x_n)$，可得一个具体区间

$$(\hat{\theta}_1(x_1,\cdots,x_n),\hat{\theta}_2(x_1,\cdots,x_n))$$

- 给定N个不同的样本观测值，得N个具体的区间，平均来说，其中会有$(1-\alpha)N$个区间包含真参数θ。
- 区间估计的精度：置信区间的长度。

- 原则：在保证区间估计的置信度的条件下，提高区间估计的精度。

- **定义：**设 $\hat{\theta}_1$ 是一个统计量，α (0< α <1)为一给定常数, 若$\forall\,\theta\in\Theta$, 都有

$$P(\hat{\theta}_1 < \theta) = 1 - \alpha$$

则称$(\hat{\theta}_1, +\infty)$为$\theta$的**置信系数**为1-$\alpha$的单侧置信区间。$\hat{\theta}_1$称为单侧置信下限。

- **定义：**设 $\hat{\theta}_2$ 是一个统计量，α (0< α <1)为一给定常数, 若$\forall\,\theta\in\Theta$, 都有

$$P(\theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$$

则称$(-\infty, \hat{\theta}_2)$为$\theta$的**置信系数**为1-$\alpha$的单侧置信区间。$\hat{\theta}_2$称为单侧置信上限。

区间估计常用方法——枢轴变量法

- 例7.4.1:随机地从一批螺栓中抽取16枚，测得其平均直径为2.125厘米。设螺栓的直径服从正态分布X~N(μ ,0.01^2),求μ 的置信度为95%的置信区间。
- 解：首先考虑μ 的点估计。样本均值是μ的点估计量，而且 $\bar{X} \sim N(\mu, 0.01^2/n)$ 。于是

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{0.01/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- 取$1-\alpha=95\%$，查表得$u_{0.025}=1.96$，我们知道

$$P(|U|<u_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha$$

即：

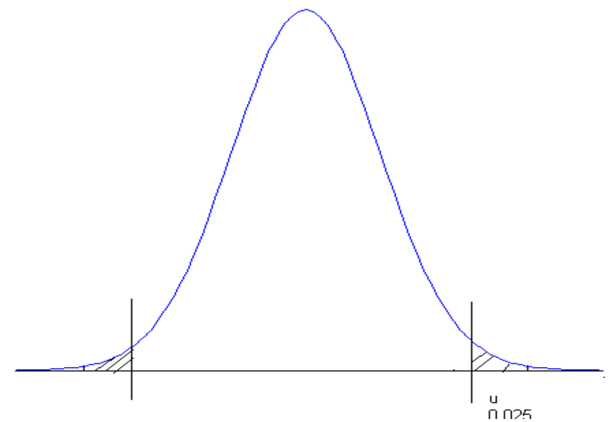
$$P\left(-u_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}<u_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

也就是：

$$P\left(\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}<\mu<\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)=1-\alpha$$

- 所以的μ置信度为1-α的置信区间为:

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$



- 把数据带入上式，得到本题的参数μ的置信度为95%的一个置信区间为:

(2.215-1.96*0.01/4, 2.215+1.96*0.01/4)

=(2.1201, 2.1299)

- 主要步骤：
- （1） 寻找一个和点估计量有关的样本函数 $Z=U(X_1,\ldots,X_n;\theta)$，只含未知参数$\theta$，不含任何其它未知参数；而且$Z$的分布已知，不依赖于未知参数$\theta$。这样的$Z$称为枢轴变量。但注意它不是统计量。
- （2）对于给定的置信度$1-\alpha$，根据Z的分布找到两个分位数a和b，使 $P\left(a<Z<b\right)=1-\alpha$
- （3）由不等式$a<Z<b$，解出 $\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2$

- 以上求置信区间的方法称为主元法或枢轴变量法。注意a和b的取法不唯一，即置信区间不唯一。a和b的最佳取法是使区间长度（即精度）达到最小。通常来说
- （1）Z的分布关于y轴对称时，取$a=-b$
- （2）Z的分布关于y轴不对称时，取a和b，使

$$P\left(Z<a\right)=P\left(Z>b\right)=\alpha/2$$

- 二. 正态总体参数的区间估计
- 1. 一个正态总体参数的区间估计

设总体X~N(μ ,σ^2), $X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自X的样本, α (0< α <1)为一给定常数

- 1) σ^2已知, 求μ 的置信区间

取枢轴变量:

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

再由

$$P(|U|<u_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha$$

- 利用不等式变形得:

$$P\left(\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}<\mu<\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)=1-\alpha$$

- 所以μ的置信度为1-α的置信区间为:

$$(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}})$$

- 单侧置信区间的求法:以置信上限为例，枢轴变量仍为

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

由 $$P(U>\lambda)=1-\alpha$$

利用不等式变形得:

$$P(\mu<\bar{X}+u_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=1-\alpha$$

所以μ的置信度为**1-α**的置信上限为:

$$(-\infty,\bar{X}+u_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

- 2) σ^2未知, 求μ的置信区间

取枢轴变量:

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

再由

$$P(|T| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = 1-\alpha$$

利用不等式变形得:

$$P(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = 1-\alpha$$

所以μ的置信度为1-α的置信区间为:

$$(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$$

- 3) μ未知, 求σ^2的置信区间

取枢轴变量:

$$Z=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

再由

$$P(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))=1-\alpha$$

利用不等式变形得:

$$P(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)})=1-\alpha$$

所以σ^2的置信度为1-α的置信区间为:

$$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)})$$

- 例7.4.2： 随机地取某种炮弹9发做试验，得炮口速度的样本二阶中心矩为11。设炮口速度服从正态分布，求方差的90%的置信区间。
- 解：

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)=\left(\frac{nS^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{nS^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

=(99/15.507，99/2.733)

$S^{*2}=11 \Rightarrow S^2=\frac{n}{n-1}S^{*2}=\frac{9}{8}\times 11$

- **2. 两个正态总体参数的区间估计**

设总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_1, X_2, \ldots, X_{n1}$是来自X的样本, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n2}$是来自X的样本α ($0< \alpha <1$)为一给定常数。

- 1) σ_1^2 , σ_2^2已知时，求两总体均值之差$\mu_1-\mu_2$的置信区间

取枢轴变量:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

再由

$$P(|Z| < u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

- 利用不等式变形得:

$$P\left(\bar{X}-\bar{Y}-\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}u_{\frac{\alpha}{2}}<\mu_1-\mu_2<\bar{X}-\bar{Y}+\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

- 所以μ_1-μ_2的置信度为1-α的置信区间为:

$$(\bar{X}-\bar{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\quad \bar{X}-\bar{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})$$

- 2) σ_1^2，σ_2^2未知但相等时，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$， 求两总体均值之差$\mu_1$-$\mu_2$的置信区间

取枢轴变量:

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

所以μ_1-μ_2的置信度为1-α的置信区间为:

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\quad \bar{X}-\bar{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

- 3) μ_1, μ_2未知时，求两总体方差之比σ_1^2/σ_2^2的置信区间

取枢轴变量:

$$F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2}$$

所以σ_1^2/σ_2^2的置信度为1-α的置信区间为:

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)} \right)$$

待估参数		主元	置信区间
一个正态总体 μ	σ^2已知	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
一个正态总体 μ	σ^2未知	$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$
一个正态总体 σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

两个正态总体

$\mu_1-\mu_2$：

σ_1^2,σ_2^2已知时，$Z=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知时，$t=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

$$\left(S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)$$

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ $(\mu_1,\mu_2$未知$)$ $F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

- 例7.4.3：研究两种固体燃料火箭推进器的燃烧。设两者都服从正态分布，并且已知燃烧率的标准差均近似地为0.05cm/s，取样本容量为$n_1=n_2=20$。得燃烧率的样本均值分别为18cm/s，24cm/。设两样本独立，求两燃烧率总体均值差的置信水平为0.99的置信区间。

$\sigma_1=\sigma_2=0.05$

- 解：　(-6.04,-5.96)

$\bar{x}-\bar{y}\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

- 三.非正态总体的区间估计(大样本法)
- 设样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，$\sigma^2>0$的总体。$\alpha(0<\alpha<1)$为一给定常数，求μ的置信度为$1-\alpha$的区间估计。
- 当$n\to\infty$时，由中心极限定理知：

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

- 若σ^2已知时，μ的置信度为$1-\alpha$的区间估计与前相同。

- 若σ^2未知时，以样本方差代替总体方差，得μ的置信区间为:

$$\left(\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

- 与前面正态分布（ σ^2未知时）的区间估计差别仅在于分布不同。

- 例7.4.4. (二项分布参数的区间估计)设总体 X~b(1,p), $X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自X的样本，求p的区间估计。
- 解：因为p=E(X)，利用前面结论得到p的置信度为1- α的区间估计为：

$$\left(\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\left(\bar{X}-\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n-1}}u_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n-1}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

- 下面再介绍一种求p的区间估计方法。由棣莫弗—拉普拉斯积分极限定理得到：

$$\frac{\sum_{i-1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)} / \sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

- 于是得到p的置信度为1- α的区间估计为：

$$\left(\bar{X} - \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} u_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$= \left(\bar{X} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} u_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$